Teoria miary i całki
WPPT IIr. semestr zimowy 2009/10
Lista 16 (+ uzupełnienie)

18/12/09

Wszystkie miary występujące w zadaniach są określone na ustalonej (ale dowolnej) przestrzeni mierzalnej (X, Σ).

Zadanie 1. Niech ν i ξ będą dowolnymi miarami na (X, Σ).
a) Sprawdź, że $\nu + \xi$ jest miarą.
b) Jeśli $\nu \geq \xi$ i $\xi < \infty$, to $\nu - \xi$ też jest miarą.
c) Jesli obie są singularne względem pewnej miary μ, to ich suma i różnica (jeśli ma sens) też.
d) Suma (i różnica, jesli jest miarą nieujemną) miar absolutnie ciągłych względem μ jest absolutnie ciągła względem μ.

Zadanie 2. Udowodnij jednoznaczność rozkładu miary ν na sumę miar: absolutnie ciągłej względem μ i singularnej względem μ.

Zadanie 3. Udowodnij twierdzenie o rozkładzie (czyli $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 \preccurlyeq \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$) w przypadku, gdzy ν jest σ-skończona.

Zadanie 4. Niech μ oznacza miarę liczącą, a ν to dowolna miara. Jaki jest rozkład miary ν na część singularną i absolutnie ciągłą względem μ?

Zadanie 5. Dana jest miara μ i dwie nieujemne funkcje mierzalne f i g. Rozważmy miary μ_f i μ_g z gęstościami f i g (tzn. $\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu$ i $\mu_f(E) = \int_E g\, d\mu$). Jaki jest rozkład miary μ_g na część absolutnie ciągłą i singularną względem μ_f?
Podpowiedź: To też będą miary postaci μ_h z gęstościami, gdzie funkcje h (dwie: jedna dla części absolutnie ciągłej, druga – singularnej) będą jakoś ,,zrobione” z funkcji f i g.

Zapoznać się z zamieszczonym poniżej materiałem, a następnie rozwiązać kolejne zadania.

Rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów X nazywa się σ-*ideałem* jeśli:
1) $B \subset A \in \mathcal{R} \implies B \in \mathcal{R}$,
2) $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{R}$.

Na przykład σ-ideałem jest rodzina wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru C. Inny przykład, to zbiory co najwyżej przeliczalne.

Zadanie 6. Dana jest miara μ określona na σ-ciele Σ. Sprawdź, że rodzina

$$\mathcal{N}_\mu = \{A : \exists B \in \Sigma, A \subset B, \mu(B) = 0\}$$

jest σ-ideałem.

Zadanie 7. Dana jest miara μ określona na σ-ciele Σ. Niech $\overline{\Sigma}^{\mu} = \sigma(\Sigma \cup \mathcal{N}_\mu)$ gdzie $\mathcal{N}_\mu$ jest określone w zadaniu poprzednim. Sprawdź, że

$$\overline{\Sigma}^{\mu} = \{A \cup B : A \in \Sigma, B \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

$\overline{\Sigma}^{\mu}$ nazywamy σ-ciałem *uzupełnionym względem miary* μ.

Zadanie 8. Dana jest miara μ określona na σ-ciele Σ. Miarę tą rozszerzamy do $\overline{\Sigma}^{\mu}$ tak: jeśli $\overline{\Sigma}^{\mu} \ni C = A \cup B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{N}_\mu$, to $\mu(C) = \mu(A)$. Sprawdź poprawność defnicji i że to jest miara na $\overline{\Sigma}^{\mu}$. Miarę μ rozszerzoną do $\overline{\Sigma}^{\mu}$ nazywamy *miarą uzupełnioną*.

Zadanie 9. Miara μ na Σ taka, że $\Sigma = \overline{\Sigma}^{\mu}$ nazywamy *miarą zupełną*. Wykaż, że do zupełności miary potrzeba i wystarcza aby Σ zawierało σ-ideał $\mathcal{N}_\mu$ z zadania 6.

Zadanie 10. Sprawdź, że jeśli μ jest miarą zdefiniowaną jako obcięcie miary zewnętrznej do swoich zbiorów mierzalnych, to μ jest zupełna.

Zadanie 10*. Wykaż, że sigma ciało zbiorów borelowskich uzupełnione względem miary Lebesgue'a pokrywa się z sigma-ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego względem miary zewnęrrznej Lebesgue'a.

Zadanie 12. Miara μ określona na σ-ciele Σ jest *absolutnie ciągła* względem σ-ideału $\mathcal{R}$ jeśli dla każdego $A \in \Sigma$, $A \in \mathcal{R} \implies \mu(B) = 0$. Miara μ jest *singularna* względem $\mathcal{R}$ jeśli istnieje $B \in \Sigma$ taki, że $\mu(B) = 0$ i $B^c \in \mathcal{R}$. Udowodnij, że każda miara skończona μ rozkłada się jednoznacznie na $\mu_1 + \mu_2$, gdzie $\mu_1 \preccurlyeq \mathcal{R}$ i $\mu_2 \perp \mathcal{R}$. *WSK. Można (ale nie trzeba) skorzystać z zadania następnego.*

Zadanie 13. Czy każdy σ-ideał $\mathcal{R}$ pokrywa się z rodziną zbiorów miary zero jakiejś miary?